

Федеральное государственное бюджетное
учреждение науки

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения
Российской академии наук
(ИМ СО РАН)

"УТВЕРЖДАЮ"

Директор ИМ СО РАН
И.И. Корн. РАН



С.С. Гончаров

"14" октября 2016 г.

630090 Новосибирск, пр. Академика Коптюга
Для телеграмм: Новосибирск, 90, Математика
Тел.: (8-383) 333-28-92. Факс: (8-383) 333-25-98
E-mail: im@math.nsc.ru

14. 10. 2016 № 15302 - 2 - 2191

На № _____ от _____

ОТЗЫВ

ведущей организации на диссертацию
Полякова Дмитрия Михайловича
“Метод подобных операторов в спектральном
анализе линейных операторов”,
представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный
и функциональный анализ

Актуальность темы исследований. Диссертационная работа Д.М. Полякова посвящена спектральной теории линейных обыкновенных дифференциальных операторов. Целью автора является изучение спектральных свойств дифференциального оператора четвертого порядка и одномерного оператора Шрёдингера с негладкими потенциалами и различными типами краевых условий. К исследованию спектральных свойств обыкновенных дифференциальных операторов такого типа приводят многие задачи математической физики. Информация о спектре и спектральных проекторах таких операторов зачастую позволяет конструировать решения задач математической физики и изучать их качественные свойства. Поэтому актуальность темы исследований не вызывает сомнений.

Следует отметить, что полное аналитическое решение спектральных задач для линейных операторов, как правило, невозможно даже в конечномерном случае, и для получения информации о спектральных свойствах операторов используются различные приближенные методы. В настоящее время в литературе имеется большое количество работ по изучению спектральных задач для классов линейных операторов.

В частности, при рассмотрении дифференциальных операторов на конечном интервале с различными краевыми условиями используются резольвентный метод, метод асимптотического представления решений, метод подобных операторов.

В настоящей диссертации автор использует схему метода подобных операторов, развитого в работах его научного руководителя А.Г. Баскакова, и модифицирует ее при рассмотрении конкретных задач для получения основных результатов.

Остановимся кратко на содержании представленной диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, списка литературы. Общий объем диссертации составляет 114 страниц.

Во введении автор дает краткую историческую справку, определяет цели исследования, описывает основные результаты, вынесенные на защиту.

Первая глава диссертации имеет вспомогательный характер. Она содержит основные понятия и результаты из общей теории линейных операторов в банаховых пространствах. Здесь приводится общая схема метода подобных операторов.

Во второй главе диссертации изучаются спектральные свойства дифференциального оператора четвертого порядка

$$L_{bc} : D(L_{bc}) \subset L_2(0, 1) \rightarrow L_2(0, 1),$$

который определяется выражением

$$y^{(IV)} - a(t)y'' - b(t)y. \quad (1)$$

В качестве области определения $D(L_{bc})$ рассматривается множество функций из соболевского пространства $W_2^4(0, 1)$, удовлетворяющих периодическим ($y^{(j)}(0) = y^{(j)}(1)$, $j = 0, 1, 2, 3$) либо антипериодическим ($y^{(j)}(0) = -y^{(j)}(1)$, $j = 0, 1, 2, 3$) краевым условиям. Предполагается, что $a, b \in L_2(0, 1)$. Основными результатами главы являются асимптотические представления собственных значений λ_n оператора L_{bc} и оценки аппроксимации спектральных проекторов Рисса \hat{P}_n при $n \gg 1$. Получение результатов основано на применении метода подобных операторов. В качестве следствий этих результатов установлена секториальность оператора $-L_{bc}$ и построена соответствующая ему аналитическая полугруппа операторов $\{T(t)\}$, $t \geq 0$.

В третьей главе диссертации изучаются спектральные свойства двух дифференциальных операторов четвертого порядка

$$L_i : D(L_i) \subset L_2(a_i, b_i) \rightarrow L_2(a_i, b_i), \quad i = 1, 2,$$

которые определяются дифференциальным выражением вида (1). В качестве области определения первого оператора L_1 рассматривается множество функций из соболевского пространства $W_2^4(0, 1)$, удовлетворяющих краевым условиям типа Дирихле:

$$y(0) = y(1) = 0, \quad y''(0) = y''(1) = 0.$$

В качестве области определения второго оператора L_2 рассматривается множество функций из соболевского пространства $W_2^4(-1, 1)$, удовлетворяющих краевым условиям типа Неймана:

$$y(-1) = y(1) = 0, \quad y'(-1) = y'(1) = 0.$$

Предполагается, что определяющие коэффициенты a, b каждого из операторов принадлежат $L_2(a_i, b_i)$. Основными результатами главы являются асимптотические представления собственных значений λ_n^i операторов $L_i, i = 1, 2$, и оценки аппроксимации соответствующих спектральных проекторов Рисса \hat{P}_n^i при $n \gg 1$. Эти результаты являются некоторыми аналогами теорем из второй главы, их получение также основано на использовании схемы метода подобных операторов. Однако формулы в асимптотических представлениях выглядят несколько сложнее соответствующих формул из предыдущей главы. Из полученных результатов вытекают секториальность операторов $-L_i, i = 1, 2$, и представления соответствующих аналитических полугрупп операторов $\{T_i(t)\}, t \geq 0$.

В четвертой главе диссертации изучаются спектральные свойства одномерного оператора Шрёдингера с негладким потенциалом

$$S : D(S) \subset L_2(0, \omega) \rightarrow L_2(0, \omega),$$

который определяется выражением

$$s(y) = -y'' - v(t)y, \quad \text{где} \quad v(t) = \sum_1^{\infty} \hat{v}_k \cos(k\pi t/\omega) \in L_2(0, \omega).$$

В качестве области определения $D(S)$ рассматривается множество функций из соболевского пространства $W_2^2(0, \omega)$, удовлетворяющих условию Дирихле $y(0) = y(\omega)$. Основными результатами главы являются асимптотические представления собственных значений λ_n оператора S при $n \gg 1$ и оценки аппроксимации спектральных проекторов. Из этих результатов вытекают секториальность оператора $-S$ и асимптотическое представление аналитической полугруппы операторов, генератором которой является $-S$. Отметим, что в отличие от предыдущих двух глав получение результатов основано на использовании несколько иной схемы метода подобных операторов (см. описание в параграфе 4.1).

Доказанные в диссертации теоремы демонстрируют возможности метода подобных операторов при проведении спектрального анализа линейных дифференциальных операторов. Автор в совершенстве овладел этим методом, внес определенный вклад в его развитие и установил с помощью этого метода ряд новых результатов при изучении спектральных свойств одномерных дифференциальных операторов с негладкими коэффициентами. В частности, в диссертации получены новые асимптотические разложения для собственных значений и оценки отклонений спектральных проекторов для рассматриваемых операторов. Полученные результаты усиливают также некоторые из известных ранее, в частности, для оператора Шрёдингера с негладким потенциалом. Поэтому результаты автора представляют несомненный математический интерес.

По диссертации имеется несколько критических замечаний.

1. На стр. 4 при определении пространства l^p некорректно использован термин “гильбертово пространство последовательностей”.

2. В тексте диссертации иногда встречаются неудачные обозначения. Например, в главе 3 на одних и тех же страницах рассматриваются дифференциальные операторы L_i , $i = 1, 2$, и пространство Лебега L_2 .

3. На стр. 85 в качестве собственной функции e_n вместо $e_n(t) = \sqrt{2} \sin(k\pi t/\omega)$ следует взять $e_n(t) = \sqrt{2/\omega} \sin(k\pi t/\omega)$. В противном случае оператор P_n , определенный на стр. 86, при $\omega \neq 1$ не будет проектором.

4. Во введении, а также во второй и третьей главах диссертации, желательно было бы приводить более четкие сравнения полученных результатов с известными в литературе.

Указанные замечания не влияют на положительную оценку диссертации в целом. Диссертационная работа выполнена на высоком научном уровне. Автором получен ряд новых результатов, представляющих интерес в теории линейных дифференциальных операторов. Все результаты диссертации обоснованы полными доказательствами и своевременно опубликованы. По теме диссертации имеется 10 публикаций, из них 5 статей в журналах из списка изданий, рекомендованных ВАК. Результаты исследований докладывались на международных конференциях и научных семинарах. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Диссертация Д.М. Полякова носит теоретический характер. Полученные результаты могут в дальнейшем применяться в научных исследованиях в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова, в Новосибирском государственном университете, в Санкт-Петербургском государственном университете, в Воронежском государственном университете, в Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН и др.

Представленная диссертация удовлетворяет всем требованиям ВАК, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ, и ее автор, Поляков Дмитрий Михайлович, несомненно заслуживает присуждения указанной степени.

Отзыв обсужден на заседании лаборатории дифференциальных и разностных уравнений Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук 12 октября 2016 г. (протокол № 4).

Отзыв подготовил старший научный сотрудник лаборатории дифференциальных и разностных уравнений, доктор физико-математических наук, доцент



Гордиенко В.

Гордиенко Валерий Михайлович

Подпись <i>В. М. Гордиенко</i>
удостоверяю
Зав. орготделом <i>Л. П. Головкина</i>
ИМ СО РАН <i>Гордиенко</i>
«14» 10 2016г.